Составил: ст. преп. Мартынова Т.Е., компьютерная вёрстка: ст. преп. Мартынова Т.Е.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену.

1. Определение абсолютной и относительной погрешности.

Пусть y – точное неизвестное значение некоторой величины, а y^* – ее известное приближенное значение. Разность $y-y^*$ между точным и приближенным значением величины принято называть ***ошибкой***, а меру ошибки – ***погрешностью***.

Абсолютная погрешность – это количественная мера ошибки, вычисляемая по формуле:

$$\Delta(y^*)=|y-y^*|. \qquad (1.1)$$

Относительная погрешность – это качественная мера ошибки, представляющая собой долю ошибки в значении y:

$$\delta(y^*)=\frac{\Delta(y^*)}{|y|}. \qquad (1.2)$$

Непосредственное вычисление погрешностей по формулам (1.1) и (1.2) невозможно (как правило, y неизвестно), поэтому для *оценки абсолютной погрешности* задают верхнюю границу:

$$\overline{\Delta}(y^*)\geq|y-y^*|, \qquad (1.3)$$

а для *относительной погрешности* полагают :

$$\delta(y^*)\approx\frac{\overline{\Delta}(y^*)}{|y^*|}. \qquad (1.4)$$

2. Оценка абсолютной погрешности функции нескольких переменных.

Пусть $y=f(x)$ – функция одной переменной, для которой известна абсолютная погрешность $\Delta(x^*)$. Тогда абсолютная погрешность значения функции в точке x^* оценивается по формуле

$$\Delta(y^*)\leq|f'(x^*)|\cdot\Delta(x^*). \qquad (2.1)$$

Если функция зависит от нескольких переменных $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$, то формула для оценки абсолютной погрешности принимает вид:

$$\Delta(y^*)\leq\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_i^*)}{\partial x_i}\right|\Delta(x_i^*). \qquad (2.2)$$

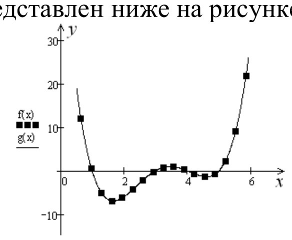
3. Постановка задачи интерполяции.

Пусть функция $y=f(x)$ задана набором значений в $n+1$ точках (т.е. таблично): $x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n$

$$f(x_i)=y_i, \quad i=0,1,\dots,n.$$

Значения аргумента x_i, представленные в таблице, называются ***узлами интерполяции***. Требуется построить приближающую функцию $y=g(x)$, которая будет <u>точно</u> проходить через узловые значения $g(x_i)=y_i$, а между ними будет достаточно близкой к f, т.е. $g(x)\approx f(x)$ вне x_i.

Пример графической иллюстрации постановки задачи интерполяции представлен ниже на рисунке.



4. Определение сплайна и его дефекта.

Пусть отрезок $[a;b]$ разбит точками $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ на n частичных отрезков $[x_{i-1};x_i]$. ***Сплайном степени* m** называется функция $S_m(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) функция $S_m(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ вместе со своими производными $S'_m(x), S''_m(x), \dots, S_m^{(p)}(x)$ до некоторого порядка p;

2) на каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$ функция $S_m(x)$ совпадает с некоторым алгебраическим многочленом $P_{m,i}(x)$ степени m, : $P_{m,i}(x)=a_{m,i}x^m+a_{m-1,i}x^{m-1}+...+a_{2,i}x^2+a_{1,i}x+a_{0,i}$.

Дефектом сплайна называется разность $m-p$ между степенью сплайна m и наивысшим порядком p его производной, непрерывной на отрезке $[a;b]$.

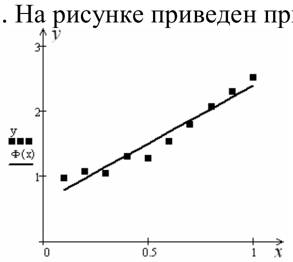
5. Идея метода наименьших квадратов.

В вычислительной математике метод наименьших квадратов применяется для аппроксимации таблично заданной функции $f(x_i)=y_i, \quad i=0,1,\dots,n$. В отличие от интерполяции, не требуют точного прохождения приближающей функции $\Phi(x)$ через заданные точки таблицы. Приближающую функцию ищут в виде обобщенного многочлена $\Phi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+...+a_m\varphi_m(x)$, где $\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)$ − заданные базисные функции, $a_0,a_1,...,a_m$ − неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Ясно, что можно построить множество функций, удовлетворяющих условию $\Phi(x_i)\approx y_i$. Критерием выбора наилучшей аппроксимирующей функции является *минимум среднеквадратического отклонения* $\delta=\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(\Phi(x_i)-y_i)^2}$. Набор базисных функций подбирают из свойств исходных данных, он должен быть линейно независимым и, по возможности, иметь небольшой объем ($m<<n$). Задача заключается в нахождении неизвестных коэффициентов $a_0,a_1,...,a_m$ при условии $\delta\to\min$. Необходимым условием минимума функции нескольких переменных (в данном случае $m+1$ переменная) является равенство нулю ее частных производных по всем независимым переменным. Это условие дает систему линейных алгебраических уравнений $\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_j(x_i)\cdot\varphi_k(x_i)\right)a_j=\sum_{i=0}^{n}y_i\varphi_k(x_i), \quad k=0,1,...,m$, которая носит название *нормальной системы метода наименьших квадратов*. Поскольку основная матрица системы является симметрической и положительно определенной, решение $a_0,a_1,...,a_m$ системы доставляет минимум δ.

Наиболее часто используют полиномиальный базис $\varphi_0=1,\varphi_1=x,\varphi_2=x^2,...,\varphi_m=x^m$ для $m\leq4$. В простейшем случае для $m=1$ имеем линейный многочлен наилучшего среднеквадратического приближения

$\Phi(x) = a_0 + a_1 x$. СЛАУ для определения коэффициентов a_0 и a_1 принимает вид: $\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{cases}$

. На рисунке приведен пример линейной аппроксимации:



6. Разностные формулы для аппроксимации первой и второй производных.

Пусть функция $y = f(x)$ задана набором значений в (n+1)-ой точке $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$, причём узлы расположены по возрастанию и через один и тот же интервал: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$; $x_{i+1} - x_i = h = const,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Формулы

$$f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$f'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

есть правая, левая и центральная разностные производные первого порядка соответственно.

Центральная разностная производная второго порядка

$$f''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Правая и левая разностные производные имеют первый порядок точности по h, а центральные – второй.

7. Идея приближенного вычисления определенного интеграла методами трапеций и прямоугольников.

Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. Требуется вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$.

Пользуясь геометрическим смыслом определённого интеграла, можно заменить задачу отыскания первообразной на подсчёт площади под кривой $y = f(x)$. Для этого следует разбить промежуток $[a; b]$ на n одинаковых отрезков длиной h: $a = x_0,\quad x_i = x_0 + ih,\quad i = 1, 2, \ldots, n$; затем подсчитать приближённо площадь под кривой на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ тем или иным способом, а окончательный результат получить суммированием площадей.

Формула трапеций: $I \approx h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right)$, где $f_i = f(x_i)$.

Формула центральных прямоугольников: $I \approx h\sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac{1}{2}}$, где

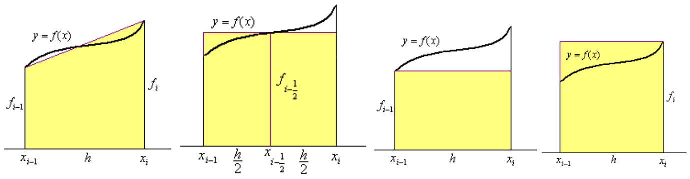
$$f_{i-\frac{1}{2}} = f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right), \quad x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Формула левых прямоугольников: $I \approx h\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}$, где $f_{i-1} = f(x_{i-1})$.

Формула правых прямоугольников: $I \approx h\sum_{i=1}^{n} f_i$, где $f_i = f(x_i)$

.

Формулы левых и правых прямоугольников имеют первый порядок точности по h, а формулы трапеций и центральных прямоугольников – второй. Ниже на рисунках представлена графическая иллюстрация формул.



8. Определение нормы матрицы.

Нормой матрицы **A** (обозначается $\|\mathbf{A}\|$) с вещественными элементами называется неотрицательное число, вычисляемое с помощью элементов матрицы и обладающее следующими свойствами:

1) $\|\mathbf{A}\| > 0$, $\|\mathbf{A}\| = 0$ тогда и только тогда, когда **A** - нулевая матрица;

2) $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{A}\|, \quad \alpha \in \mathbf{R}$;

3) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$;

4) $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$.

9. Определение 1-, 2- и ∞-норм векторов и 1-, евклидовой (Фробениуса) и ∞-норм матриц.

Пусть $\bar{x}$ – вектор в пространстве $\mathbf{R}^n$, тогда

1-норма вектора $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

2-норма вектора $\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$,

∞-норма вектора $\|\bar{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

Пусть $\mathbf{A}$ – вещественная матрица порядков $m \times n$, тогда

1-норма матрицы $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$,

наибольшее значение среди сумм абсолютных значений элементов в каждом столбце;

евклидова норма (Фробениуса) матрицы $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$,

все элементы матрицы возводим в квадрат, суммируем и извлекаем корень;

∞-норма матрицы $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,

наибольшее значение среди сумм абсолютных значений элементов в каждой строке.

10. Определение числа обусловленности матрицы.

Пусть $\mathbf{A}$ – квадратная вещественная матрица, тогда ***число обусловленности матрицы:***

$\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$.

Матрица *плохо обусловлена*, если $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) >> 1$. Для вырожденной матрицы полагают $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \infty$.

11. Расчетная формула для итерационного процесса и условие сходимости.

Метод простых итераций применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из n уравнений с n неизвестными, если основная матрица системы не вырождена, т.е. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (11.1)$$

СЛАУ в матричной форме $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}$ необходимо преобразовать к виду $\bar{x} = \mathbf{B}\bar{x} + \bar{c}$. (11.2)

Один из способов преобразования (метод Якоби) состоит в том, что из первого уравнения системы (11.1) выражаем x_1, из второго x_2 и т.д. Далее выбираем начальное приближение $\bar{x}^{(0)}$ и подставляем его в правую часть уравнения (11.2) , тем самым находим первое приближение $\bar{x}^{(1)} = \mathbf{B}\bar{x}^{(0)} + \bar{c}$; подставляем первое приближение $\bar{x}^{(1)}$ в правую часть уравнения (11.2) и находим второе приближение $\bar{x}^{(2)} = \mathbf{B}\bar{x}^{(1)} + \bar{c}$ и т.д.

Расчетная формула для k-ой итерации имеет вид $\bar{x}^{(k)} = \mathbf{B}\bar{x}^{(k-1)} + \bar{c}$.

Процесс можно прекратить, когда значения неизвестных в последней и предпоследней итерации совпадают до требуемой точности (например, до трёх знаков после запятой).

Достаточное условие сходимости: метод простых итераций сходится к единственному решению СЛАУ при любом начальном приближении $\bar{x}^{(0)}$, если какая-либо норма матрицы **B** системы (11.2) меньше единицы: $\|\mathbf{B}\| < 1$.

12. Расчетная формула метода Ньютона для нелинейного уравнения.

Пусть на отрезке $[a; b]$ имеется только один корень нелинейного уравнения $f(x) = 0$. ***Расчетная формула метода Ньютона*** имеет вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},\ k = 0,1,\ldots,$$

где $f'(x^{(k)}) \neq 0$, $x^{(0)} \in [a; b]$ – заданное начальное приближение.

13. Идея метода Эйлера построения приближенного решения задачи Коши для обыкновенного диф. уравнения.

Рассматривается дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Требуется найти решение на отрезке $[a; b]$, где $x_0 = a$. На отрезке $[a; b]$ вводится ***разностная сетка*** $x_k = x_0 + hk$, $k = 0,1,\ldots,n,\quad h = \frac{b-a}{n}$. Точки x_k называются ***узлами*** разностной сетки, а функции, заданные лишь в узлах сетки – ***сеточными***. Приближённое решение задачи Коши будем искать численно в виде сеточной функции y^h.

Интегральная кривая согласно условию должна проходить через точку $y(x_0) = y_0$ и иметь в этой точке касательную. Тангенс угла наклона касательной к оси Ox равен значению производной от решения в точке x_0 и равен значению правой части дифференциального уравнения в точке $(x_0; y_0)$: $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. В случае небольшого шага h разностной сетки графики интегральной кривой и касательной не успевают сильно разойтись друг от друга, и можно в качестве значения решения в узле x_1 принять значение касательной y_1 вместо значения точного неизвестного решения. Считая теперь точку $(x_1; y_1)$ начальной, повторяем предыдущие действия.

Формула метода Эйлера имеет вид:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

14. Идея метода сеток.

Рассмотрим идею метода сеток для конкретного дифференциального уравнения в частных производных, а именно, уравнения Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Ясно, что этому уравнению удовлетворяют многие функции $u = u(x, y)$. Конкретный вид функции $u(x, y)$ зависит от граничных условий, т.е. от значений функции на границах области изменения переменных G, которые задаются пользователем. Идея состоит в том, что вместо отыскания аналитической формулы $u(x, y)$ во всей области G, определить приближенные значения функции в некоторых точках внутри области G, как правило, образующих сетку. В двумерных областях проще использовать прямоугольную сетку, разбивая область G вдоль осей Ox и Oy на части с одинаковым шагом h. Приближенные значения производных в каждом узле выбранной сетки записывают, используя информацию о значениях искомой функции $u(x, y)$ в соседних узлах. Для частных производных разностные формулы принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}, \qquad \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2},$$

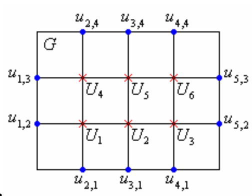
подстановка которых в уравнение Лапласа дает уравнение

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0. \qquad (14.1)$$

Рассмотрим конкретный пример сетки, эскиз которой приведен на рисунке. Здесь $u_{1,2}$, $u_{1,3}$, $u_{2,1}$, $u_{3,1}$, $u_{4,1}$, $u_{5,2}$, $u_{5,3}$, $u_{2,4}$, $u_{3,4}$, $u_{4,4}$ – заданные граничные условия, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 – значения функции в узлах сетки, подлежащие определению. Применяя формулу (14.1) для каждой внутренней точки области, получаем СЛАУ из 6 уравнений относительно 6 неизвестных U_i, которую можно решить любым известным методом (прямым или итерационным).

$$\begin{cases} u_{1,2} + u_{2,1} + U_2 + U_4 - 4U_1 = 0 \\ U_1 + u_{3,1} + U_5 + U_3 - 4U_2 = 0 \\ U_2 + u_{4,1} + u_{5,2} + U_6 - 4U_3 = 0 \\ u_{1,3} + U_1 + U_5 + u_{2,4} - 4U_4 = 0 \\ U_4 + U_2 + U_6 + u_{3,4} - 4U_5 = 0 \\ U_5 + U_3 + u_{5,3} + u_{4,4} - 4U_6 = 0 \end{cases}$$

Если пользователю необходима непрерывная функция, то ее можно получить, например, используя двумерную сплайн-интерполяцию на основе найденных дискретных значений U_i



.